CAPÍTULO 7

A UTILIZAÇÃO NO ENSINO DE CÁLCULO INTEGRAL E GEOMETRIA ANALÍTICA APLICADO NA REGIÃO ADMINISTRATIVA DA COSANPA EM BELÉM DO PARÁ

Wallace Hyan de Sousa Farias Silva
https://orcid.org/0009-0006-8235-505X
Acadêmico no curso de Engenharia de Produção da UEPA

Carlos Armando Souza Brito Neto
https://orcid.org/0009-0006-5854-4993
Acadêmico no curso de Engenharia de Produção da UEPA

Gabriel Souza Araujo
https://orcid.org/0009-0003-7580-9656
Acadêmico no curso de Engenharia de Produção da UEPA

Victor Hugo da Silva Pereira
https://orcid.org/0009-0007-6915-068X
Acadêmico no curso de Engenharia de Produção da UEPA

Gilberto Emanoel Reis Vogado
https://orcid.org/0000-0003-4763-4767
Universidade do Estado do Pará (PA), Brasil

Victor Hugo Chacon Britto
https://orcid.org/ 0000-0002-1000-8722
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Souza, Belém, PA, Brasil

Carlos Alberto Nobre da Silva
https://orcid.org/0000-0001-5299-1713
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Souza, Belém, PA, Brasil

Henrique Maia Pinheiro
https://orcid.org/0000-0001-5705-3486
Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Montanha, Montanha, ES, Brasil

RESUMO: As formas de medição e seus métodos são questões que estão presente com a humanidade desde a antiguidade e com o passar do tempo e a criação de novas tecnologias sua funcionalidade apresenta-se cada vez mais eficaz. Tal necessidade é explorada constantemente dentro da Engenharia de Produção, que depende fortemente na análise de dados para o dimensionamento dos mais diversos locais. Este estudo teve como foco principal o cálculo da área de uma Usina de Tratamento de Água da Companhia de Saneamento do Pará (COSANPA) por meio do método manual, com a utilização de régua, escalímetro e calculadora científica e o auxílio de livros para complementar as bases teóricas de cálculo de área através da integral e da geometria plana. Como referencial teórico, utilizou-se as bases da geometria analítica e cálculo, de acordo com Nery e Oliveira (2011); SILVA (2023); (MUNDO EDUCAÇÃO, s.d.); (UNESP, s.d.); (UFV, s.d.), (DICAS DE CÁLCULO, s.d.); (OBARICENTRO DA MENTE, 2018). A pesquisa é aplicada, de forma quali-quantitativa e classifica-se como um estudo de caso. Os métodos utilizados apresentaram-se muito eficientes, permitindo compreender de forma clara o espaço físico apresentado já que os métodos matemáticos complementares foram uma grande e importante ferramenta para encontrar a solução de problemas reias, reforçando ainda mais esse método tradicional.

PALAVRAS-CHAVE: Engenharia de produção. Cálculo de área. Método manual. Integral. Geometria plana.

1 INTRODUÇÃO

A Usina de Tratamento de Água da Companhia de Saneamento do Pará (COSANPA), situada no Parque Estadual do Utinga Camillo Vianna, desempenha papel central no abastecimento hídrico de Belém e de grande parte da Região Metropolitana. Localizada em uma área de proteção ambiental que abriga os lagos Bolonha e Água Preta, a usina integra um sistema essencial para a captação, tratamento e distribuição de água potável. A preservação desse espaço é decisiva para a manutenção da qualidade da água e para a segurança hídrica da população, reforçando a importância estratégica do Parque do Utinga tanto do ponto de vista ambiental quanto socioeconômico.

A análise matemática da área selecionada na imagem fornecida pelo professor fundamenta-se em dois eixos teóricos: a Geometria plana e o Cálculo Integral. Para a primeira etapa, utilizou-se o cálculo da área de um triângulo a partir de coordenadas cartesianas, conforme apresentado (LEITHOLD, 1994) ao tratar da representação de figuras planas e das propriedades métricas derivada de pontos no plano. Essa abordagem permite modelar geometricamente a região estudada, fornecendo um método preciso para determinar áreas delimitadas por segmentos de reta.

Na segunda etapa, empregou-se o conceito de integral definida para o cálculo de áreas, conforme desenvolvido (GUIDORIZZI, 2013) em sua formulação do Cálculo Integral. A integral, ao generalizar o processo de soma de áreas elementares, possibilita a obtenção de medidas contínuas e rigorosas de regiões planas e curvas, sobretudo quando os limites são descritos por funções. Essa combinação metodológica — Geometria Analítica e Integral Definida — assegura a consistência teórica do trabalho e permite uma interpretação quantitativa precisa da área analisada.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Ao se utilizar as ferramentas matemáticas: Geometria plana e os cálculos de integral, pode se calcular com precisão a área da Usina de Tratamento de Água da Companhia de Saneamento do Pará (COSANPA), portanto é necessário compreender as ferramentas que serão utilizadas.

2.1 GEOMETRIA PLANA - CÁLCULO DA ÁREA DOS TRIÂNGULOS

Os estudos sobre cálculo de área em triângulos são centrais na geometria plana. Em trabalho publicado, Nery e Oliveira (2011) discutem relações entre área e alturas do triângulo, destacando que a medida da área pode ser obtida a partir de diferentes grandezas do polígono. Segundo os autores, a área pode ser expressa de múltiplas formas, dependendo das propriedades consideradas. Em outras palavras, além da tradicional fórmula base × altura, outras estruturas internas do triângulo, como suas alturas, permitem representar a área sem alterar seu valor geométrico.Materiais didáticos clássicos reforçam esse princípio ao apresentar a área como metade do produto da base pela altura . Esses materiais registram que a relação entre lados, ângulos e medida da altura fornece o caminho direto para a determinação da área. Isso significa que a definição fundamental continua sendo simples, mas depende da correta identificação da altura correspondente à base escolhida, permitindo resolver problemas com diferentes configurações geométricas.

Outra abordagem importante aparece em estudos que revisitam o cálculo da área a partir da história e de aplicações práticas, integrando fórmulas como a de Herão e casos especiais, como o triângulo equilátero (SILVA, 2023). O autor explica que diversas expressões para a área surgem conforme a evolução histórica e o tipo específico de triângulo analisado. Isso evidencia que o cálculo da área não se limita a uma única expressão, mas acompanha o desenvolvimento matemático e as características do triângulo envolvido.

Por fim, abordagens analíticas também ganham destaque. Segundo artigo educacional sobre geometria analítica, a área pode ser obtida por meio das coordenadas cartesianas dos vértices (MUNDO EDUCAÇÃO, s.d.). O texto afirma que, conhecendo-se os pontos no plano, é possível calcular a área por meio de determinantes. Tal método amplia a aplicação do conceito, permitindo calcular áreas mesmo quando o triângulo não está em posição favorável à aplicação direta de base e altura.

2.2 CÁLCULO INTEGRAL E ORIGEM - CÁLCULO DE ÁREAS

O estudo do cálculo integral tem suas origens na matemática grega antiga, especialmente nos trabalhos de Arquimedes. Segundo Santos e Miguel (2020, p. 3), o matemático utilizava o método da exaustão, no qual "a área era determinada por meio de sucessivas aproximações, utilizando figuras geométricas cada vez menores". Esse procedimento antecipava a noção de limite, fundamental para o cálculo integral moderno.

No século XVII, o cálculo integral passou a ser sistematizado com os trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. De acordo com Rosa e Baroni (2018, p. 5), "Newton e Leibniz desenvolveram, de forma independente, métodos gerais para o cálculo de áreas e problemas de quadratura". Leibniz introduziu a notação ∫, associando a integral à ideia de soma de infinitesimais.

A relação entre derivação e integração foi consolidada pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Conforme afirmado por Rosa e Baroni (2018, p. 7), esse teorema mostra que "a operação de integrar pode ser entendida como o processo inverso da diferenciação", o que garantiu unidade teórica ao cálculo.

Posteriormente, buscou-se maior rigor matemático. Roque (2009, p. 18) destaca que "no século XIX, Cauchy e Riemann estabeleceram definições mais precisas para a integral, baseadas em limites de somas", ampliando sua aplicação a diferentes tipos de funções.

No campo do cálculo integral, a obtenção de áreas sob curvas surge inicialmente no estudo das somas de Riemann. De acordo com trabalho publicado com uso do GeoGebra, o processo de aproximações sucessivas permite visualizar a área como limite dessas somas (UNESP, s.d.). O estudo mostra que as áreas são inicialmente estimadas por retângulos, convergindo para o valor exato por meio das integrais definidas. Em síntese, o conceito moderno de área sob uma função deriva do processo de refinamento dessas aproximações.

Outro trabalho voltado ao ensino médio destaca que o cálculo de áreas antecede o formalismo do cálculo, surgindo historicamente da necessidade de mensurar regiões irregulares (UFV, s.d.). O texto aponta que antes das integrais, métodos geométricos eram empregados para aproximar áreas de figuras curvas. Isso demonstra que o cálculo integral formalizou matematicamente um problema que já era tratado empiricamente desde a Antiguidade.

Além disso, materiais introdutórios sobre integrais reforçam que a integral definida é a ferramenta central para a determinação de áreas entre a função e o eixo x (DICAS DE CÁLCULO, s.d.). Esses materiais explicam que a integral acumula valores infinitesimais, transformando-os na área total da região estudada. Assim, diferentemente das fórmulas fixas da geometria plana, o cálculo integral permite mensurar áreas de regiões ilimitadas ou não poligonais.

Finalmente, textos aplicados mostram que a área entre duas curvas é obtida pela diferença entre suas funções, integradas no mesmo intervalo (OBARICENTRO DA MENTE, 2018). O autor esclarece que a integral da função superior menos a inferior representa a região plana compreendida entre elas. Dessa forma, o cálculo integral amplia o conceito de área, permitindo analisar regiões formadas não apenas por curvas isoladas, mas também por suas interações.

3 METODOLOGIA

Esta sessão apresenta a pesquisa que foi realizada nos dias 3 à 10 de dezembro de 2025, na localidade do Campus da UEPA Castanhal, realizou a medição da área da região administrativa da Cosanpa, instalada dentro do parque do Utinga, em Belém-Pa. A pesquisa tem como principal objetivo:(1) calcular a área da região através da integral e da (2) geometria plana, utilizando coordenadas cartesianas. A área do local a ser estudado foi retirada do Google Maps, onde oferece uma escala de 20 m , demonstrado abaixo, na figura 1, que pode ter diferente fontes de erro, como imprecisões na delimitação da área, falhas de cálculos e variações na escala dos instrumentos utilizados.

Figura 1: Imagem da área administrativa da Cosanpa, no Parque do Utinga.

Fonte: Google Maps (2025)

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa aplicada trata-se, de natureza quali-quantitativa, com uma abordagem descritiva, voltada para o estudo de cálculo de áreas pelo método da integral em espaços físicos e reais. A revisão teórica da pesquisa teve como apoio livros de cálculo principalmente os voltados a integral e a geometria analítica, sem esquecer no caso especial da área, onde a geometria plana pode ser usada de forma eficiente. A pesquisa utilizou-se em grande maioria de métodos numéricos e analíticos com o auxílio da calculadora científica. Essa caracterização da pesquisa deu-se com o objetivo apresentar de forma clara que métodos manuais podem ser usados de maneira precisa, assim garantindo a solução das necessidades que o espaço possui.

3.2 MATERIAIS

Folha impressa da área (Google Maps)

Régua

Escalímetro

Caneta

calculadora científica casio fx-91lacw classwiz

Software Google Earth (para validação comparativa).

3.3 ETAPAS DO MÉTODO DA PESQUISA

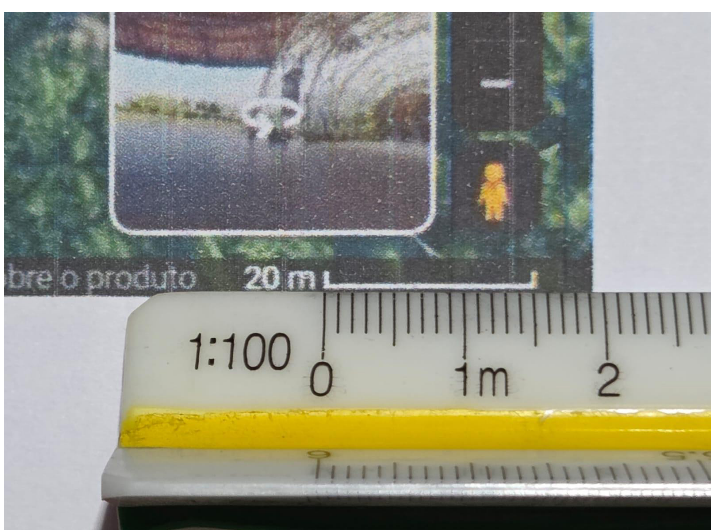
Primeiramente foi impresso a imagem da área na escala de 20 m, assim como mostra na Figura 1. Em seguida, foi traçado o eixo das ordenadas (y) e das abcissas (x), com isso dividindo a área em duas, assim como mostra na Figura 2.

Figura 2: Plano cartesiano na imagem

Fonte: Autores

Logo após foi identificado que a escala de 20 m, transformado em centímetros, equivale a 1,5 cm e no plano a cada 1,5 cm equivalia a 20 m. Em seguida, foi pego a Área 1, mostrado na Figura 3, que tem formato de um triângulo e mediu-se a base, a altura e foi calculada a sua área, onde, obteve-se o resultado da Área 1, que será mostrada e detalhada nas "Fórmulas e cálculos".

Figura 3: Imagem em escala da área convertido para centímetros



Fonte: Autores

Figura 4: Valores equivalentes a base e a altura da Área 1

Fonte: Autores

Após encontrar a Área 1, foi pego a Área 2, mostrado na Figura 4, e por conta da complexidade desta área foi utilizado o Cálculo da Integral. Este cálculo serve para áreas que possuem curvas.

Figura 5: Área 2

Fonte: Autores

Em seguida, foi pego quatro pontos (A, B, C e D) que saia do eixo das abcissas até o ponto da curva em que se interligava no eixo das ordenadas, mostrado na Figura 5. Estes pontos que estavam em centímetros, foi convertido novamente para a escala real para poder encontrar o resultado da área.

Figura 6: Pontos da curva

Fonte: Autores

Ao pegar estes pontos, foi montado quatro equações do terceiro grau e usamos a calculadora científica para encontrar o valor das quatro incógnitas da equação de sistema linear. Ao encontrar o conjunto de valores que satisfaçam todas essas equações, foi pego cada valor e montou um cálculo de integral definida. Com o uso da calculadora científica casio fx-91lacw classwiz, obteve-se o resultado da Área 2 e ao somar com a Área 1, teve resultado da Área Total, que será mostrada e detalhada nas "Fórmulas e cálculos".

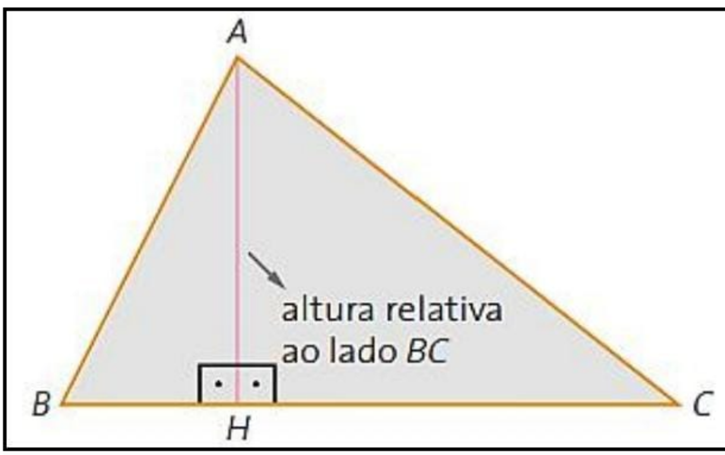
3.4 Fórmulas e cálculos

3.4.1 ÁREA 1

Como foi visto na figura 3 , esta área possui uma região triangular, para isso, vejamos a fórmula e como calcular esta área utilizando a Geometria Plana.

Kindle (2007); Dante (2019) e Lima (2020), afirmam que a área de uma região triangular ABC a partir dos pontos A, B e C com representação através da Figura 6 abaixo:

Figura 7 - Representação de uma região triangular



Fonte: Dante (2019)

Pela Geometria plana, sabemos que a área da região triangular da figura é dada por:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Apartir disso, foi medido no plano, em centímetros, o valor da base e da altura. Em seguida, convertido esse valor para metros, já que a cada 1,5 cm valia 20 m, e foi feito o cálculo da área na seguinte forma:

b= 137m $\qquad$ $A1 = \frac{137 \times 326}{2} = 22.331\ m^2$

h= 326 m

Ao fazer o cálculo da área, foi encontrado o valor da Área 1, que equivale a 22.331 m².

3.4.2 ÁREA 2

Como foi visto na Figura 4, esta área possue uma região com curva, onde se torna mais complexo. Para isso, vejamos a fórmula e como calcular esta área utilizando a Equação de Sistema Linear (4 incógnitas) e o Cálculo de Integral Definida.

Utilizando o ajuste de curvas, encontra-se o valor para usar no cálculo de integral definida. Para RUGGIERO (1996), trata-se do modelo, em que o ajuste (ainda linear) dispõe-se a representar um fenômeno em que há mais de uma variável independente envolvida, ou seja, um modelo expresso matematicamente por y = f(x1,...,xp),p ≥ 2. Ouando, y = f1(x1) +... + fp(xp), p ≥ 2, onde f1,...,fp são p funções lineares nas variáveis x1,...,xp, respetivamente. O ajuste polinomial, é o tipo de ajuste no qual se busca uma curva associada a um polinômio de grau maior ou igual a dois. Ou seja, a função de ajuste tem a forma:

$$f(x) = \alpha 0 + \alpha 1x + ...+ \alpha p\ x\ p\ ,\ p \geq 2$$

O conjunto de equações assim obtidos é um sistema linear de p + 1 equações com p + 1 incógnitas que, quando solucionado, fornece os parâmetros da função de ajuste. Implicando a notação e escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \cdots & \sum x_{pi} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}x_{1i} & \cdots & \sum x_{1i}x_{pi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_{pi} & \sum x_{1i}x_{pi} & & \sum x_{pi}x_{pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_{pi} y_i \end{bmatrix}$$

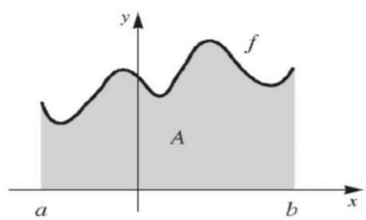
Primeiramente, foi pego quatro pontos das curvas no plano, A (20,131); B (40,132); C (60,128) e D (80,123), assim como mostra na Figura 5. Foi isolado os pontos do eixo y e formando uma equação de sistema linear (4 incógnitas), assim como está demostrado abaixo:

$$\begin{cases} 20^3a + 20^2b + 20c + d = 131 \\ 40^3a + 40^2b + 40c + d = 132 \\ 60^3a + 60^2b + 60c + d = 128 \\ 80^3a + 80^2b + 80c + d = 123 \end{cases}$$

Ao usar a calculadora científica casio fx-91lacw classwiz e fazer este cálculo de sistema linear, obteu-se os seguintes resultados, ; e .

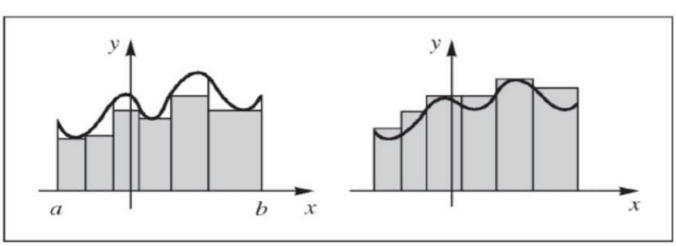
Em seguida, foi utilizado a fórmula da Integral Definida para encontrar o valor da Área 2, usando os valores encontrados anteriormente.

Guidorizzi (2013), seja f contínua em [a,b], com f(x) ≥ 0 em [a,b]. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas x = a, x = b, y = 0 e pelo gráfico y = f(x),



Seja, então, $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam $\overline{c}_i$ e $\overline{\overline{c}}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(\overline{c}_i)$ é o valor mínimo e $f(\overline{\overline{c}}_i)$ o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Uma boa definição para *área de A* deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)\Delta x_i$ seja uma aproximação por *falta* da área de A e que $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{\overline{c}}_i)\Delta x_i$ seja uma aproximação por excesso, isto é

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)\Delta x_i \leqslant \text{área } A \leq \sum_{i=1}^{n} f(\overline{\overline{c}}_i)\Delta x_i$$



Como a somas de Riemann mencionadas tendem a , pega-se os valores adquiridos no cálculo da equação de sistema linear, e o valor em que a curva toca no eixo x (137), bota na integral e encontra o valor da Área 2 usando a Integral Definida. Assim, foi utilizado a calculadora científica para fazer o seguinte cálculo :

$$A2 = \int_0^{137} (8,3 \times 10^{-5}x^3 - 0,01625x^2 + 0,791x + 121)dx = 10.072m^2$$

Ao fazer o cálculo da integral , foi encontrado o valor da Área 2, que equivale a 10.072 m². Logo após, soma o valor da Área 1 com o valor da Área 2 e obtém o valor da Área Total.

$$A1 + A2 = At$$

$$22.331 + 10.072 = 32.403m^2$$

Logo, obteve-se o valor da área da região administrativa da Cosanpa, no Parque do Utinga, que equivale a 32.403 m².

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A determinação da área correspondente à Usina de Tratamento de Água da Companhia de Saneamento do Pará (COSANPA), situada no Parque Estadual do Utinga Camillo Vianna, foi realizada por meio da divisão da região analisada em dois segmentos geométricos distintos. Essa estratégia permitiu maior precisão no cálculo.

Na Área 1, cuja geometria aproximou-se de um triângulo, aplicou-se a expressão clássica de área para polígonos triangulares. Utilizando-se as coordenadas delimitadas na imagem fornecida e considerando a linearidade dos limites, obteve-se uma área equivalente a 22.331 m². A adoção dessa abordagem fundamenta-se na simplicidade do formato e na adequação do método para regiões com arestas bem definidas, conforme discutido por Stewart (2016) ao tratar de aproximações geométricas em contextos aplicados.

A Área 2 apresentou formato mais irregular, não compatível com métodos puramente geométricos. Dessa forma, optou-se pelo emprego de integração definida para estimar sua extensão superficial. A função que descreve o contorno inferior foi aproximada a partir de quatro pontos amostrais, metodologia condizente com processos de interpolação e integração numérica, tal como defendido por Anton, Bivens e Davis (2012). Após a aplicação da integral definida sobre o intervalo correspondente, encontrou-se uma área de 10.072 m².

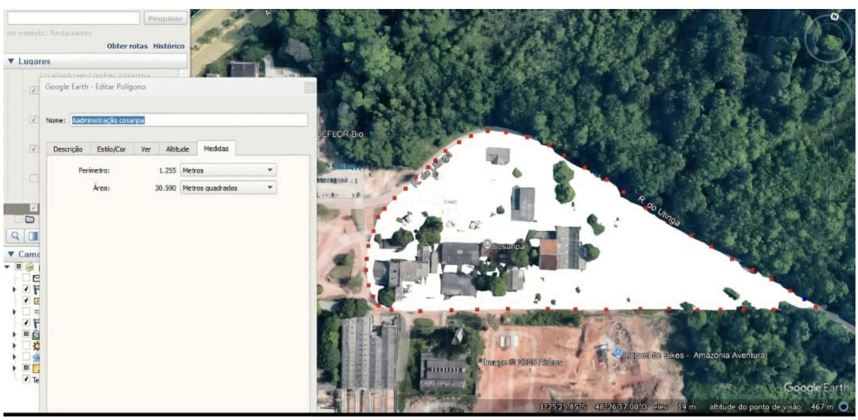
A junção dos resultados obtidos nas duas etapas produziu uma área total de 32.403 m² para a região analisada. Esse procedimento confirma a relevância da subdivisão do domínio em partes tratáveis separadamente, uma vez que a combinação de métodos — geométricos e integrais — mostrou-se eficaz para lidar com regiões reais cuja forma não se ajusta a modelos ideais. Além disso, reforça-se a importância das técnicas de cálculo diferencial e integral na modelagem e solução de problemas concretos, especialmente na análise de ambientes naturais ou estruturas urbanas, como enfatizado por Thomas (2018).

Em síntese, os resultados demonstram que a integração numérica, associada a aproximações geométricas, constitui uma ferramenta adequada para a determinação de áreas em situações de campo, garantindo coerência e precisão compatíveis com os objetivos da disciplina.

4.1 Comparação com ferramenta digital (Google Earth Pro)

Com a finalidade de validar os resultados obtidos pelo método manual associado ao Cálculo Integral, realizou-se uma comparação com a medição automática fornecida pelo Google Earth Pro. A ferramenta estima áreas por meio da vetorização de polígonos sobre imagens de satélite, estando sujeita à resolução da imagem e aos critérios de delimitação adotados pelos autores.

Figura 8: Imagem da área delimitada pelo Google Earth.



Fonte: Google Earth.

A área estimada pelo Google Earth Pro foi de 30.590 m², enquanto o método manual resultou em 32.403 m², evidenciando uma diferença absoluta de 1.813 m², correspondente a uma variação percentual aproximada de 5,9 % em relação ao valor digital. Tal discrepância é considerada aceitável no contexto de um estudo acadêmico, uma vez que a medida digital constitui uma estimativa aproximada e não um valor exato do terreno.

As diferenças observadas podem ser atribuídas, principalmente, às limitações inerentes à conversão de escala gráfica, à delimitação manual dos contornos e ao ajuste polinomial da curva utilizada no cálculo da Área 2. Assim, a comparação confirma a consistência do método manual empregado, demonstrando que a aplicação conjunta da Geometria Plana e do Cálculo Integral apresenta resultados compatíveis com ferramentas digitais de uso corrente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo alcançou seu objetivo ao determinar a área da região administrativa da COSANPA, localizada no Parque Estadual do Utinga, por meio da aplicação conjunta da Geometria Plana e do Cálculo Integral. A análise permitiu compreender de forma precisa a extensão territorial da área estudada, reforçando a importância da utilização de métodos matemáticos complementares para a solução de problemas reais relacionados ao espaço físico. Além disso, o estudo reafirma a relevância do cálculo diferencial e integral como ferramentas essenciais na modelagem de ambientes naturais e estruturais, sobretudo em contextos de planejamento urbano e ambiental. Portanto, a investigação contribui para a compreensão prática da aplicação do cálculo em situações reais e destaca a importância de abordagens matemáticas precisas no apoio a processos de análise espacial, consolidando seu valor tanto para a disciplina quanto para estudos futuros que envolvam medição e interpretação de áreas.

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R.; VIANA, F. Matemática: contexto & aplicações: ensino médio. 4. ed. São Paulo: Ática, 2019.

DICAS DE CÁLCULO. Integrais – cálculo de áreas. Disponível em: https://www.dicasdecalculo.com.br/conteudos/integrais/. Acesso em: 05 dez. 2025.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. v. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

KINDLE, J. H. Geometria analítica. Coleção Schaum. México: McGraw-Hill, 2007.

LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, Elon Lages. Espaços métricos. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

MUNDO EDUCAÇÃO. Área de um triângulo pela geometria analítica. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/area-um-triangulo-pela-geometria-analitica.htm. Acesso em: 08 dez. 2025.

NERY, C.; OLIVEIRA, E. C. Área de um triângulo e suas alturas. Revista C.Q.D., UNESP. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/430. Acesso em: 06 dez. 2025.

OBARICENTRO DA MENTE. Cálculo da área entre duas curvas através de integral. Disponível em: https://obaricentrodamente.com/2018/05/calculo-de-area-entre-duas-curvas-atraves-de-integral.html. Acesso em: 06 dez. 2025.

SILVA, R. Ângulos e áreas em geometria plana com ênfase na história e aplicações. Seven Publicações, 2023. Disponível em: https://sevenpublicacoes.com.br/ISJM/article/download/1730/2195/5937. Acesso em: 05 dez. 2025.

THOMAS, George B. Cálculo. 13. ed. São Paulo: Pearson, 2018.

UNESP. Soma de Riemann e cálculo de área sob uma curva por integrais com uso do GeoGebra. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/items/75fbc2e7-6782-406f-a2bb-abdea91b3336. Acesso em: 05 dez. 2025.

UFV – Universidade Federal de Viçosa. Cálculo de áreas no ensino médio. Trabalho acadêmico. Disponível em: https://locus.ufv.br/handle/123456789/11617. Acesso em: 06 dez. 2025.

SANTOS, M. R.; MIGUEL, A. Arquimedes e o método da exaustão: contribuições para o cálculo de áreas. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, Fortaleza, v. 7, n. 20, p. 1–15, 2020.

ROSA, C. M.; BARONI, R. L. S. O surgimento do cálculo diferencial e integral nos trabalhos de Newton e Leibniz. In: Anais do Encontro Brasileiro de Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2018. P. 1–12.

ROQUE, T. História do cálculo infinitesimal. Revista Brasileira de História da Matemática, São Paulo, v. 9, n. 17, p. 11–34, 2009.